Dokaz: 1. Funkcije:

a) $z \mapsto \mathrm{Re}z$; b) $z \mapsto \mathrm{Im}z$; c) $z \mapsto |z|$

su neprekidne. Primenom Teoreme 1.1 sledi dokaz.

2. Kao u Propoziciji 1.1, dokaz sledi primenom Teoreme 1.2 za funkciju $\phi(x,y) = x + iy$, $(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

■

Iz prethodnog tvrđenja direktno sledi:

Posledica 1.1. Funkcija $f : X \to \mathbf{C}$, gde je $f(x) = u(x) + iv(x), x \in X$, je merljiva ako i samo ako su u i v merljive funkcije.

Propozicija 1.3. Ako su funkcije $f : X \to \mathbf{C}$ i $g : X \to \mathbf{C}$ merljive, tada su merljive i funkcije $f + g$, $f \cdot g$, $\alpha \cdot f$, gde je α proizvoljan kompleksan broj.

Dokaz: Dokažimo samo da je αf merljiva, gde je $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, $f = u + iv$, u, v su realne funkcije. Ostala tvrđenja se slično dokazuju.

Kako $\alpha f = (\alpha_1 u - \alpha_2 v) + i(\alpha_2 u + \alpha_1 v)$, i kako su na osnovu Propozicije 1.2 realni i imaginarni delovi funkcije αf merljivi, sledi da je αf merljiva. ■

Propozicija 1.4. Neka je $A \in \mathcal{P}(X)$ i $\kappa_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}$ karakteristična funkcija skupa A. Funkcija κ_A je merljiva ako i samo ako $A \in \mathcal{M}$.

Dokaz: Neka je $A \in \mathcal{M}$. Neka je O otvoren skup u $\mathbf{R}$. Kako je

$$\kappa_A^{-1}(O) = \begin{cases} \emptyset, & 0, 1 \notin O, \\ X, & 0, 1 \in O, \\ A, & 1 \in O, 0 \notin O, \\ A^c, & 1 \notin O, 0 \in O, \end{cases}$$

i $\emptyset, X, A, A^c \in \mathcal{M}$, sledi da je κ_A je merljiva.

Obratno, ako je κ_A merljiva, znamo da za otvoren skup $O \in \tau$ važi $\kappa_A^{-1}(O) \in \mathcal{M}$, pa je $A = \kappa_A^{-1}((0,\infty)) \in \mathcal{M}$. ■

Primedba. Označimo sa $\bar{\mathbf{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ dvotačkastu kompaktifikaciju realne prave i uvedimo uobičajenu topologiju preko familije okolina.

Familija okolina tačke ∞ je $\mathcal{V}_\infty = \{V \subseteq \bar{\mathbf{R}}; V \supseteq (a, \infty], \text{ za neko } a \in \mathbf{R}\}$.

Na sličan način se definiše $\mathcal{V}_{-\infty}$.

Navedene familije okolina tačaka ∞, $-\infty$ kao i uobičajene familije okolina tačaka iz $\mathbf{R}$ definišu uobičajenu topologiju proširene prave $[-\infty, \infty] = \bar{\mathbf{R}}$.

Osobine merljivih funkcija sa vrednostima u $\mathbf{R}$ se jednostavno prenose na merljive funkcije sa vrednostima u $\bar{\mathbf{R}}$.